

**FY11: FYSIIKAN KOKONAISKUVA (Kertauskurssi): DERIVAATTA JA INTEGRAALIA I.**

1. Tasaisesti kiihtyvän liikkeen ( $a = \text{vakio}$ ) paikka  $s$  (matka) ajan  $t$  funktiona saadaan lausekkeesta

$$s(t) = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2.$$

Nopeus on matkan derivaatta ajan suhteen;  $v = \frac{ds}{dt}$  ja kiihtyvyys on nopeuden derivaatta ajan

suhteen;  $a = \frac{dv}{dt}$ .

- a) Osoita derivoimalla matka ajan suhteen, että tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä loppunopeus  $v = v_0 + at$ .
- b) Osoita integroimalla ( $v_0 \rightarrow v$ ) kiihtyvyyden määritelmästä saatu lauseke  $dv = a dt$ , että  $v = v_0 + at$ . Aika  $t: 0 \rightarrow t$ .

2. Autoa kiihdytetään muutaman sekunnin ajan tiellä niin, että sen paikka ajan funktiona on

$$x(t) = 0,2t^3 + 0,6t^2 + 0,4$$

missä  $x$  on paikka metreinä (m) ja  $t$  aika sekunteina (s).

- a) Määritä nopeus ja kiihtyvyys hetkellä  $t$ .
- b) Laske paikka, nopeus ja kiihtyvyys hetkellä  $t = 3$  s.
- c) Laske keskimääräinen nopeus ja kiihtyvyys aikavälillä  $t = 2 \dots 3$  s.
3. a) Funktio  $s(t) = 1,5 \text{ m/s}^2 \cdot t^2$  esittää kappaleen paikkaa ajan funktiona. Määritä kappaleen nopeus hetkellä  $t = 1,5$  s.
- b) Kappaleen nopeus riippuu ajasta yhtälön  $v(t) = 0,04 \text{ m/s}^3 t^2$  mukaisesti. Kuinka pitkän matkan kappale on kulkenut ajassa  $0 \dots 4,0$  s?

4. Suoraviivaisesti liikkuvan kappaleen paikka ajan funktiona eli rata on

$x(t) = 3,2 \text{ m} - 2,8 \text{ m/s} \cdot t + 1,9 \text{ m/s}^2 \cdot t^2$ . Määritä kappaleen paikka  $x$ , nopeus  $v$  ja kiihtyvyys  $a$  hetkellä  $t = 3,3$  s.

5. Kappaleen rata on  $x(t) = -1,6 \text{ m/s}^2 \cdot t^2 + 1,7 \text{ m/s}^3 \cdot t^3$ . Määritä kappaleen keskinopeus  $v_k$  ja  $a_k$  keskikihtyvyys aikavälillä  $1,0 \text{ s} \dots 3,0 \text{ s}$ .

6. Hiukkanen liikkuu pitkin  $x$ -akselia ja sen kiihtyvyys on  $a(t) = 0,40 \text{ m/s}^3 \cdot t$ .

Alkuhetkellä sen nopeus on  $-1,6 \text{ m/s}$  ja paikka  $2,7 \text{ m}$ . Määritä hiukkasen nopeus  $v$  ja paikka  $x$  ajan  $t$  funktiona.

7. Harmonisen värähtelijän paikka ajan funktiona on  $x(t) = A \cdot \sin 2\pi f \cdot t$ . Värähtelijän amplitudi on  $A = 16 \text{ cm}$  ja taajuus  $f = 5,5 \text{ Hz}$ . Määritä värähtelijän a) paikka b) nopeus c) kiihtyvyys hetkellä  $t = 1,9 \text{ s}$ .

Vastaukset:

1. a)  $v = v_0 + at$     b)  $v = v_0 + at$ .
2. a)  $\mathbf{v}(t) = 0,6t^2 + 1,2t$ ,  $a(t) = 1,2t + 1,2$ .  
b)  $x(3s) = 11,2 \text{ m} \approx 11 \text{ m}$ .  
 $v(3s) = 9,0 \text{ m/s}$ .  
 $a(3s) = 4,8 \text{ m/s}^2$ .  
c)  $v_k = 6,8 \text{ m/s}$ ,  $a_k = 4,2 \text{ m/s}^2$ .
3. a)  $v(1,5s) = 4,5 \text{ m/s}$ ,    b)  $s \approx 0,85 \text{ m}$ .
4.  $x(3,3s) \approx 15 \text{ m}$ ,  $v(3,3s) \approx 9,7 \text{ m/s}$ ,  $a(3,3s) = 3,8 \text{ m/s}^2$ .
5.  $v_k \approx 16 \text{ m/s}$ ,  $a_k \approx 17 \text{ m/s}^2$ .
6.  $\mathbf{v}(t) = 0,20 \text{ m/s}^2 \cdot t^2 - 1,6 \text{ m/s}$ ,  $\mathbf{x}(t) = \frac{0,20}{3} \text{ m/s}^3 \cdot t^3 - 1,6 \text{ m/s} \cdot t + 2,7 \text{ m}$
7. a)  $x(1,9s) \approx 4,9 \text{ cm}$ ,    b)  $v(1,9s) \approx -5,3 \text{ m/s}$ ,    c)  $a(1,9s) \approx -59 \text{ m/s}^2$ .