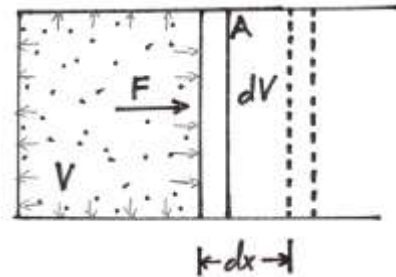


FY11: FYSIIKAN KOKONAISKUVA (Kertauskurssi): DERIVAATTA JA INTEGRAALIA II.

1. Oletetaan, sylinterissä on vakiopaineessa p kaasua tilavuudessa V_0 , joka laajetessaan työntää mäntää, jonka pinta-ala on A . Olkoon uusi tilavuus on V (ks. kuva). Kun mäntä liikkuu matkan dx , niin kaasun tilavuus muuttuu määrän $dV = A \cdot dx$. Mäntään kohdistuva voima on tällöin $F = pA$. Johda työn määritelmästä $dW = F \cdot dx$ lähtien integroimalla laajenevan kaasun työlle lauseke $\boxed{W = p \cdot \Delta V}$.



2. Magneetikentässä kulmanopeudella ω pyörivän silmukan taso on alkuhetkellä $t = 0$ kohtisuorassa magneetikenttää vastaan. Hetkellä t on silmukan kiertymä $\alpha = \omega t$. Silmukan läpäisevä magneettivuon tiheyden ja tätä vastaan kohtisuoran silmukan pinta-alan projektion tulo: $\Phi = BA \cos \alpha = BA \cos \omega t$.

Johda derivoimalla induktiolaista $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ lähtien magneetikentässä pyörivään käämiin eli

kelaan indusoituvan jännitteen lauseke $\boxed{e = \hat{e} \sin \omega t}$.

Jännitteen huippuarvo $\hat{e} = NBA\omega$, missä N on käämin kierrosluku, B on magneettivuon tiheys, A on silmukan pinta-ala ja $\omega = 2\pi f t$ käämin kulmanopeus.

Olkoon virtapiirin kokonaisresistanssi R . Mikä on käämiin indusoitunut sähkövirta i ja sen huippuarvo \hat{i} ?

3. Muuttuva virta indusoi käämin päiden välille jännitteen $e = -\frac{L di}{dt}$.

Magneetikentän syntyminen virtajohtimen ympärille sitoo energiaa, joka tässä tapauksessa lyhyenä aikavälinä dt on $dE = p dt = e dt = \frac{L di}{dt} \cdot dt = L di$.

Johda tästä lausekkeesta integroimalla käämin *magneetikentän energian* lauseke $\boxed{E = \frac{1}{2} LI^2}$, kun virta kasvaa nollostaan arvoon I .

4. **Vaihtovirran tehollinen arvo** on yhtä suuri kuin sellaisen tasavirran arvo, joka synnyttää vastuksessa yhtä suuren lämpömäärän samassa ajassa kuin vaihtovirta. Samalla tavalla määritellään **vaihtojännitteen tehollinen arvo**. Tehollisia arvoja merkitään isoilla kirjaimilla I ja U . Kun vastukseen kytketään *tasajännite*, sähköenergiaa muuttuu lämpöenergiaksi jakson T aikana määrä $E = PT = UI \cdot T = RI \cdot I \cdot T = RI^2 T$. Myöskin *vaihtovirta* aiheuttaa vastuksen lämpiämisen, mutta tämä hetkellinen teho vaihtelee jännitteen ja virran vaihdellessa:

$p = ui = Ri^2 = R(\hat{i} \sin \omega t)^2 = R\hat{i}^2 \sin^2 \omega t$. Lyhyenä aikavälinä dt muuttuu vaihtovirralla lämmöksi energiamäärä $dE = R\hat{i}^2 \sin^2 \omega t \cdot dt$.

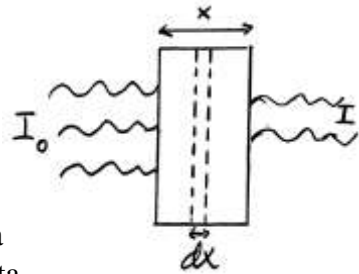
Johda tästä integroimalla jakson yli ($0 \rightarrow T$) jakson T aikana vastuksessa R lämmöksi muuttunut energia E . (Vihje: $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$).

Vertaa tätä tasavirran vastuksessa synnyttämään lämpöenergiaan $E = RI^2 T$.

Osoita, että vaihtovirran tehollinen arvo on $I = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}}$, missä \hat{i} on vaihtovirran huippuarvo.

Osoita myös tämän tuloksen avulla, että vastaavasti vaihtojännitteen tehollinen arvo on $U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$, missä \hat{u} on vaihtojännitteen huippuarvo.

5. Gammasäteily vaimenee eksponentiaalisesti kohdatessaan väliaineen ns. *heikennyslain* $I = I_0 e^{-\mu x}$ mukaisesti. I_0 on ainekerrokseen saapuvan säteilyn intensiteetti ja I läpi päässeän säteilyn intensiteetti. μ on aineesta riippuva matkavaimennuskerroin. Kun ainekerroksen paksuus Δx ja intensiteetin muutos ΔI ovat pieniä, voidaan kirjoittaa $dI = -\mu \cdot I \cdot dx$. Miinusmerkki johtuu säteilyn vaimenemisesta.



- a) Johda tästä eo. lausekkeesta puolittain integroimalla heikennyslaki $I = I_0 e^{-\mu x}$.
- b) *Gammasäteilyn puoliintumispaksuus* $d_{1/2}$ on se väliaineen paksuus, joka pienentää gammasäteilyn intensiteetin puoleen. Johda heikennyslaista gammasäteilyn puoliintumispaksuudelle yhtälö $d_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu}$.

6. Tietyllä aikavälillä Δt hajoavien atomiytimien määrälle ΔN pätee lauseke $\Delta N = -\lambda \cdot N \cdot \Delta t$, missä N on aktiivisten ytimien lukumäärä ja λ ytimelle ominainen hajoamisvakio, joka kuvaa ytimen hajoamistodennäköisyyttä aikayksikössä. Miinusmerkki yhtälössä ilmaisee sen, että ytimien lukumäärä vähenee.

- a) Johda eo. yhtälöstä puolittain integroimalla *hajoamislaki* $N = N_0 e^{-\lambda t}$, missä N_0 on alkuhetkellä ($t = 0$) olevien aktiivisten ytimien lukumäärä.
- b) Radioaktiivisen näytteen *aktiivisuus* on ytimien hajoamisten lukumäärä aikayksikössä; $A = -\frac{dN}{dt}$. Johda tästä hajoamislaista derivoimalla aktiivisuudelle yhtälö $A = \lambda N$.

7. Johda integroimalla umpinaisen sylinterin hitausmomentin yhtälö sylinterin akselin suhteen ($J = \frac{1}{2} mR^2$).

(Vihje: $J = \int r^2 dm$,

massa-alkio $dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot 2\pi r \cdot h \cdot dr$)

