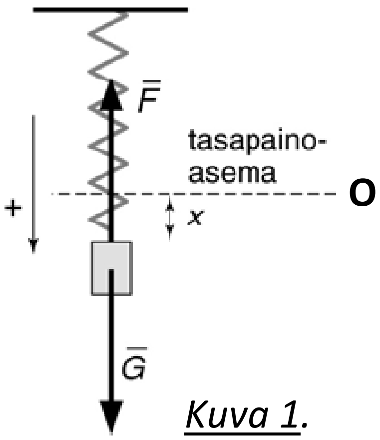
HARMONISEN VÄRÄHTELIJÄN JAKSONAIKA JA HEILURIEN HEILAHDUSAJAT - johtaminen

1) VAIMENEMATON HARMONINEN VÄRÄHDYSLIIKE

Harmoninen voima on voima, jonka suuruus on suoraan verrannollinen poikkeamaan tasapainoasemasta **O** ja joka suuntautuu tasapainoasemaa kohti.

Esim. **Jousen varassa värähtelevä kappale, jonka massa on m** (ks. kuva 1).



Kuva 1.

Harmonisen jousivoiman F lauseke F = -kx,
missä x = poikkeama tasapainoasemasta (m),
k = jousivakio (N/m).

Dynamiikan peruslain (NII) mukaan kappaleen m liikeyhtälö on $\sum \bar{F} = m\bar{a}$
eli F = ma ja edelleen

–kx = ma

Kiihtyvyys on paikan toinen derivaatta ajan suhteen; $a = \frac{d^2x}{dt^2}$,
joten harmonisen värähtelijän liikeyhtälöksi tulee toisen kertaluvun diffrentiaaliyhtälö

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \qquad | : m$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad (1)$$

Asetetaan $\omega^2 = \frac{k}{m}$, jolloin edellinen diffrentiaaliyhtälö tulee muotoon

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \qquad (2)$$

Yhtälön matemaattinen ratkaisu antaa värähtelijän poikkeaman x ajan t funktiona:

$$x = Acos(\omega t + \alpha)$$

missä A = amplitudi (poikkeaman huippuarvo), α = vaihe-ero,

ω = kulmataajuus (rad/s). Nopeudelle ja kiihtyvyydelle saadaan derivoimalla lausekkeet:

$$v \ = \frac{dx}{dt} \ = \ -A\omega sin(\omega t + \alpha)$$

$$a \ = \ \frac{dv}{dt} \ = \ \frac{d^2x}{dt^2} \ = \ -A\omega^2 cos(\omega t + \alpha) = \ -\omega^2 x$$

$$a \ = \ -\omega^2 x \qquad (3)$$

Edellä olevasta yhtälöstä (1) saadaan $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$

eli $-\frac{k}{m}x$. Vertaamalla tätä edellä johdettuun yhtälöön (3)

voidaan todeta, että $\omega^2 = \frac{k}{m}$, josta seuraa $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (4)

Kappaleen paikan, nopeuden ja kiihtyvyyden lausekkeista nähdään, että ne ovat kosini- ja sinimuotoisia kuvaajia.

Jaksollista värähtelyä kuvaava **jaksonaika eli värähdysaika T** tarkoittaa yhteen kokonaiseen värähdykseen eli jaksoon kuluvaa aikaa. Esimerkiksi jaksonaika on se aika, joka värähtelijällä kuluu ääriasemasta toiseen ja takaisin.
Yhtälön $= Acos(\omega t + \alpha)$ kuvaama funktio on jaksollinen. Sama vaihe ("tilanne") saavutetaan aina, kun kulma ωt kasvaa 2πrad. Näin ollen

$\omega(t + T) + \alpha \ = \ \omega t + \alpha + 2\pi,$ josta saadaan $\omega T = 2\pi$ eli

$$\boxed{\boldsymbol{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f}} \qquad (5)$$

Frekvenssi eli taajuus f on jaksonajan T käänteisarvo;

$$f = \frac{1}{T}$$

missä f = taajuus eli frekvenssi, taajuuden yksikkö

$\boldsymbol{[f] = \frac{1}{s} = Hz \ (= Hertsi),}$ T = jaksonaika (s)

Edellä (kaavat 4 ja 5) oli osoitettu, että kulmataajuus $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ja

$\omega = \frac{2\pi}{T}$. Nämä yhdistämällä saadaan suureyhtälö $\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}$,

josta ottamalla käänteisluvut saadaan $\frac{T}{2\pi} = \sqrt{\frac{m}{k}}$ ja kertomalla puolittain 2π:llä saadaan **harmonisen värähtelijän jaksonajalle** lauseke

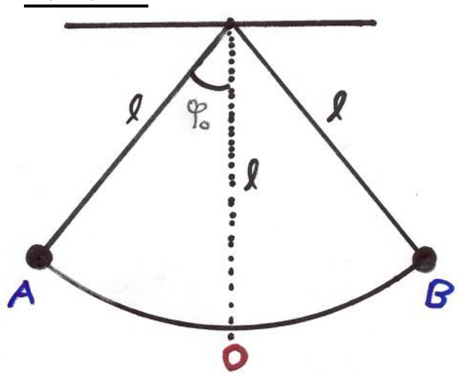
$$\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}} \qquad \textbf{(A)}$$

missä m = värähtelijän massa (kg) ja k = jousivakio (N/m).

2) MATEMAATTINEN HEILURI

= painottoman langan päässä heilahteleva massapiste (ks. kuva2)

kuva 2.

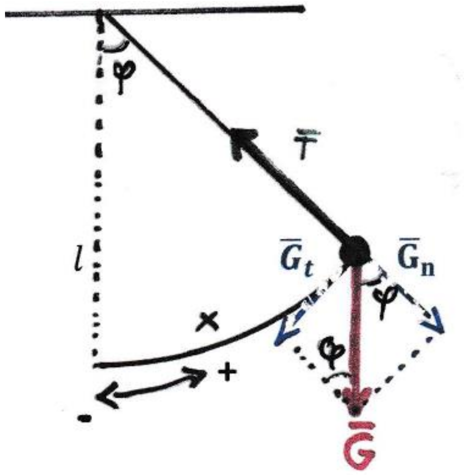


- heilurin pituus **l**
- tasapainoasema **O**
- ääriasemat **A** ja **B**
- heilahduskulma φ_o
- heilahdusaika (jaksonaika) **T**

Matemaattisen heilurin heilahdusajan johtaminen

$$\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

Kuva 3.



- **paino(voima)** $\bar{G} = m\bar{g}$
- tangenttikomponentti $\bar{G}_t = m\bar{g}sin\varphi$
- normaalikomponentti $\bar{G}_n = m\bar{g}cos\varphi$
- langan jännitysvoima $\bar{T}$
- kaaren pituus x, l = **heilurin pituus,** $x = \varphi l$

Dynamiikan peruslain (NII) mukaan matemaattisen heilurin liikeyhtälö on
F = ma eli $-G_t$ = ma

$-mgsin\varphi = m\frac{d^2x}{dt^2}$. Pienillä kulmilla $n\varphi \approx \varphi$, joten liikeyhtälö saa muodon

$$-mg\varphi = m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad | : m$$

$$-g\varphi = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + g\varphi = 0 \qquad | \qquad \text{ja sijoitetaan } x = \varphi l$$

$$l\frac{d^2\varphi}{dt^2} + g\varphi = 0 \qquad | : l$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\varphi = 0$$

Vertaamalla tätä johdettua diffrentiaaliyhtälöä eo. lausekkeeseen (2):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

havaitaan, että **matemaattinen heiluri suorittaa harmonista värähtelyliikettä** kulmanopeudella $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

Koska lausekkeen (5) mukaan $\omega = \frac{2\pi}{T}$, niin saadaan edelleen

$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}}$, josta ottamalla käänteisluvut ja kertomalla puolittain 2π:llä saadaan matemaattisen heilurin heilahdusajalle T suureyhtälö

$$\boxed{\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}} \qquad \textbf{(B)}$$

missä l = heilurin pituus (m) ja g = putoamiskiihtyvyys = 9,81 m/s^2.
Lauseke pätee vain pienille heilahduskulmille φ ja noin yli metrin pituisille matemaattisille heilureille (l > 1m).

Koska matemaattisen heilurin heilahdusaika riippuu vain heilurin pituudesta ja paikallisesta putoamiskiihtyvyydestä, voidaan heiluria käyttää ajanmittaukseen. Toisaalta heilurin pituus l ja heilahdusaika ovat helppoja määrittää tarkasti, voidaan heiluria käyttää putoamiskiihtyvyyden mittauksiin. Maaperän malmi- ja öljyesiintymät aiheuttavat tiheyden muuttumisen ympäröivään alueeseen verrattuna.

Tiheyden muutokset vaikuttavat putoamiskiihtyvyyden g arvoon. Maaperän malmi- ja öljyesiintymiä voidaan näin kartoittaa matemaattisella heilurilla.

Matemaattisen heilurin liike on vain likimain harmonista värähtelyliikettä. Edellä johdettu heilahdusajan lauseke pätee vain pienille heilahduskulmille φ. Kulma-amplitudin kasvaessa voidaan heilahdusaika laskea käyttäen seuraavaa sarjakehitelmää:

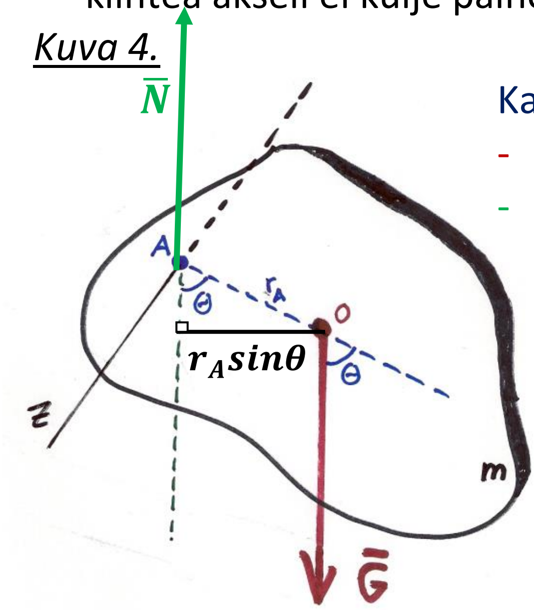
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1^2}{2^2} sin^2\frac{\varphi}{2} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} sin^4\frac{\varphi}{2} + \cdots\right)$$

3) Jäykkä heiluri eli fysikaalinen heiluri

= jäykkä kappale, joka heilahtelee kiinteän akselinsa Z ympäri

- kiinteä akseli ei kulje painopisteen O kautta

Kuva 4.



Kappaleeseen vaikuttavat voimat:

- painovoima $\bar{G} = m\bar{g}$
- akselin (tai ripustuslangan) tukivoima $\bar{N}$

Tarkastellaan kiinteän akselin **A** ympäri kiertymään pääsevää jäykkää kappaletta kuvassa 4. Akselin **A** ja painopisteen **O** välinen etäisyys on $\mathbf{r_A}$. Painovoima $\bar{G} = m\bar{g}$ aiheuttaa akselin A suhteen palauttavan momentin $M = -G \cdot r_A sin\theta$, missä θ = heilahduskulma. Miinusmerkki kuvaa momentin pyrkimystä pienentää kulmaa. Soveltamalla pyörimisen perusyhtälöä $M = J\alpha$ saadaan momentin lauseke muotoon

$$-mg \cdot r_A sin\theta \;=\; J_A \cdot \alpha$$

Ottamalla huomioon, että kiertyvän kappaleen kulmakiihtyvyys on kiertokulman θ toinen derivaatta;

$$\alpha \;=\; \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

saadaan edelleen

$$-mg \cdot r_A sin\theta \;=\; J_A \frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad (6)$$

missä J_A = kappaleen hitausmomentti pisteen A kautta kulkevan akselin Z suhteen. Hitausmomentti J on pyörimishitauden mitta. Sen yksikkö on $[J_A] = kgm^2$.

Oletetaan taas, että heilahtelun kulma-amplitudit θ ovat pieniä eli $sin\theta \;\approx\; \theta$. Tällöin yhtälöstä (6) saadaan

$$-mg \cdot r_A\theta \;=\; J_A \frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad\qquad |:J_A$$

$$\frac{-mg \cdot r_A\,\theta}{J_A} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad \rightarrow \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mg \cdot r_A}{J_A}\theta = 0 \qquad (7)$$

Diffrentiaaliyhtälö (7) on harmonisen värähtelyliikkeen muotoa, joka oli edellä lausekkeena (2). Vertaamalla yhtälöitä (7) ja (2) havaitaan fysikaalisen heilurin kulmataajuudelle olevan voimassa: $\omega^2 = \frac{mg \cdot r_A}{J_A}$.

Tästä saadaan kulmataajuudelle lauseke $\omega = \sqrt{\frac{mg \cdot r_A}{J_A}}$.

Koska lausekkeen (5) mukaan $\omega = \frac{2\pi}{T}$, niin eo. kulmanopeuden yhtälö tulee muotoon $\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{mg \cdot r_A}{J_A}}$, josta heilahdusajalle T saadaan yhtälö

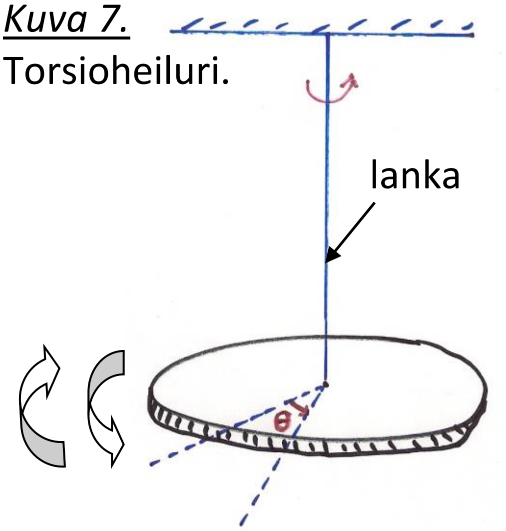
$$\boxed{\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{J_A}{mg \cdot r_A}}}} \qquad \textbf{(C)}$$

missä J_A = kappaleen hitausmomentti pisteen **A** kautta kulkevan akselin Z suhteen (kgm^2),
r_A = Akselin **A** ja painopisteen **O** välinen etäisyys (m)
mg = kappaleen paino (N).
Yhtälöä (C) voidaan käyttää kappaleen hitausmomentin J_A määrittämiseen akselin A suhteen, kun heilahdusaika T ja etäisyys r_A mitataan.
Jos hitausmomentiksi lausekkeeseen (C) sijoitetaan pistemäisen kappaleen hitausmomentti $J = mr_A^2$, saadaan matemaattisen heilurin heilahdusaika $T = \sqrt{\frac{r_A}{g}}$.

4) Kiertoheiluri eli torsioheiluri

= heiluri, jossa massakappale on ripustettu yläpäästään kiinnitettyyn kuituun, ja jonka värähtely perustuu kuidun kiertymiseen. Massakappaleen jaksollinen värähtely tapahtuu kohtisuoraan painovoimaa vastaan; myötäpäivään, vastapäivään, myötäpäivään, … jne.

Kuva 7.
Torsioheiluri.



Kierrettäessä heiluria pienen kulman θ verran kappaleeseen kohdistuu palauttava vääntömomentti

$\boldsymbol{M} = Frsin\varphi = J\alpha = -\boldsymbol{D\theta}$ (8)

missä θ = kiertymiskulma (rad)
D = palautuskerroin eli direktiomomentti (Nm/rad),

J = värähtelevän systeemin hitausmomentti (kgm^2), α = värähtelijän kulmakiihtyvyys (rad/s^2), F = voima (N), r = etäisyysvärähdysakselista (m), φ = paikan r ja voiman F välinen kulma (rad), $rsin\varphi$ = voiman F vaikutussuoran kohtisuora etäisyys kiertoakselista.

D on palautuskerroin eli direktiomomentti (Nm/rad) on kuidulle (jouselle) ominainen suure, joka riippuu käytetystä materiaalista ja sen geometrisista mitoista. Torsioheilurin momentti eli palauttava vääntömomentti noudattaa ***Hooken lakia:***

$$\boxed{\boldsymbol{M = -D\theta}}$$

Suureyhtälö muistuttaa harmonisen voiman lauseketta F = -kx. Harmoninen voima on suoraan verrannollinen poikkeamaan tasapainoasemasta ja suuntautuu tasapainoasemaa kohti. Torsioheilurin liike onkin harmonista pyörähdysliikettä.

Torsioheilurin heilahdusajalle T voidaan johtaa lauseke yhtälöstä (8) $M = -\boldsymbol{D\theta} = \boldsymbol{J\alpha}$ dynamiikan peruslain (NII) mukaan liikeyhtälö:

$$-D\theta = J\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{D}{J}\theta = 0 \qquad (9)$$

$$\left[vrt.\ tätä\ yhtälöä\ jousen\ liikeyhtälöön\ \ \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (2)\right]$$

Saatu yhtälö (9) on vaimenemattoman harmonisen värähtelijän liikeyhtälö, jonka kulmataajuudelle pätee $\omega^2 = \frac{J}{D}$ ja edelleen $\omega = \sqrt{\frac{J}{D}}$. Koska lausekkeen (5) mukaan $\omega = \frac{2\pi}{T}$, niin eo. kulmanopeuden yhtälö tulee muotoon $\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{J}{D}}$, josta heilahdusajalle eli jaksonajalle T saadaan yhtälö

$$\boxed{\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}}}} \qquad \textbf{(D)}$$

missä J = hitausmomentti pyörähdysakselin suhteen (kgm^2),
D = direktiomomentti eli palautuskerroin (Nm/rad).
Torsiovakiolle D pätee yhtälö:

$$D = \frac{GA^2}{2\pi l}$$

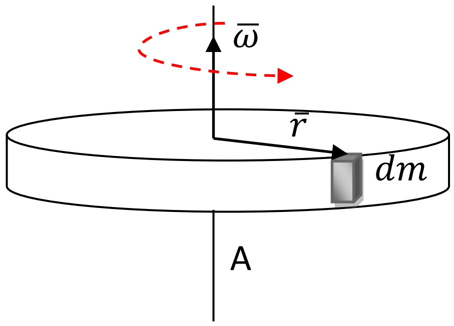
missä A = langan poikkipinta-ala,
l = langan pituus,
G = liukukerroin, joka on materiaalille ominainen vakio.
Tällä kertaa ei harmonisen värähtelyliikkeen esiintymiseksi vaadittu pieniä kulmia; riittää kun pysytään kimmoisalla alueella. Kiertovärähtelyä esiintyykin kaikissa pyörivissä kappaleissa. Mekaanisissa kelloissa on kiertovärähtelyä suorittava pyörä.

Eräs heilurityyppi on **Foucault'n heiluri**. Se on hyvin pitkävartinen heiluri, joka on ripustettu siten, että se voi vapaasti kiertyä suhteessa kiinnityskappaleeseen. Kun heiluri saatetaan heiluriliikkeeseen, se jatkaa heilumista samassa tasossa. Koska maapallo pyörii, heilumistaso kiertyy suhteessa maan pintaan. Heilurilla voidaan osoittaa maapallon pyörimisliike akselinsa ympäri.

<u>Lähteet:</u>
-Young and Freedman, University Physics, Pearson International edition, 12 th edition, Addison-Wesley, 2008, p. 419-446
-Alonso-Finn: Physics, Addison-Wesley, 1995, p.190-234
-Inkinen-Manninen-Tuohi: Insinöörifysiikka, Otava, 2. painos 2006, s. 225-244
-Eskola-Ketolainen-Stenman: Fotoni 5, Otava, 1. painos 2006, s.72-80.

##
MIKÄ ON HITAUSMOMENTTI?

HITAUSMOMENTTI J eli inertiamomentti on pyörimishitauden mitta.
Tarkastellaan jäykkää kappaletta, joka pyörii kiinteän akselin A ympäri kulmanopeudella ω (ks. kuva).



Kappaleen massa-alkion dm liike-energia on

$$dE = \frac{1}{2} dm \cdot v^2 \qquad (1)$$

Pyörimisliikkeen kulmanopeuden ω ja kehänopeuden (ratanopeuden) v välillä vallitsee yhteys

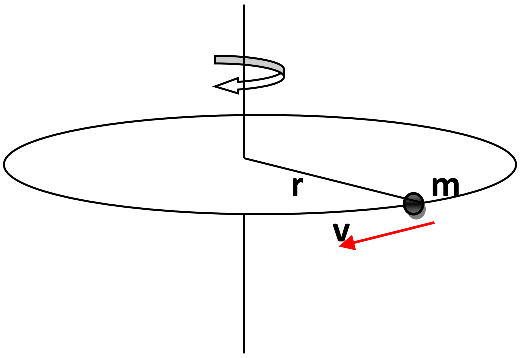
$$v = \omega r, \qquad (2)$$

missä r on massa-alkion dm kohtisuora etäisyys kiertoakselista A.

Koko kappaleen liike-energialle A saadaan lausekkeiden (1) ja (2) perusteella integroimalla (laskemalla yhteen) differentiaalisten massa-alkioiden dm liike-energiat (1), jolloin saadaan ***pyörimisenergialle eli rotaatioenergialle*** yhtälö

$$\boldsymbol{E} = \int \frac{1}{2} dm \cdot \omega^2 r^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \int r^2 dm = \boldsymbol{\frac{1}{2} J\omega^2}$$

missä $J = \int r^2 dm$ on kappaleen hitausmomentti (akselin A suhteen).
Usein edellä olevan integraalin $J = \int r^2 dm$ laskeminen on suoritettava ottamalla huomioon yhteys $dm(r) = \rho(r) dV$, missä r on (diffrentiaalisen) massa-alkion dm paikka, $\rho(r)$ sen tiheys ja dV sen tilavuus. Homogeenisen kappaleen tapauksessa on luonnollisesti $dm = \rho dV$ ja integraali palautuu tavalliseksi tilavuusintegraaliksi. Hitausmomentteja on taulukossa; ks. MAOL s. 126-127 (117-118).



Esim. pistemäiselle kappaleelle
$J = mr^2$