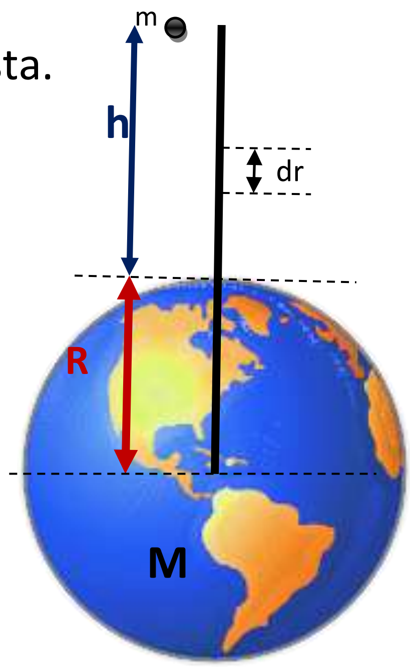
<u>Nostotyö, potentiaalienergia ja kokonaisenergia Maan gravitaatiokentässä.</u>

<u>Tehtävä 1. Johda suureyhtälö nostotyölle korkeudelle h Maan pinnasta.</u>

(ks. http://www.kotiposti.net/ajnieminen/nos.pdf)



Kappale m nostetaan korkeudelle h Maan pinnasta. Kuinka suuri työ tällöin tehdään?

<u>Ratkaisu.</u>

Jos nostokorkeus h on pieni, niin putoamiskiihtyvyys g voidaan katsoa vakioksi; g = 9,81 m/s^2.

Nostettaessa kappaletta (massa m) korkeudelta r ylöspäin Δr:n verran on työ

$$\Delta W = F(r)\Delta r = \gamma \frac{mM}{r^2} dr$$

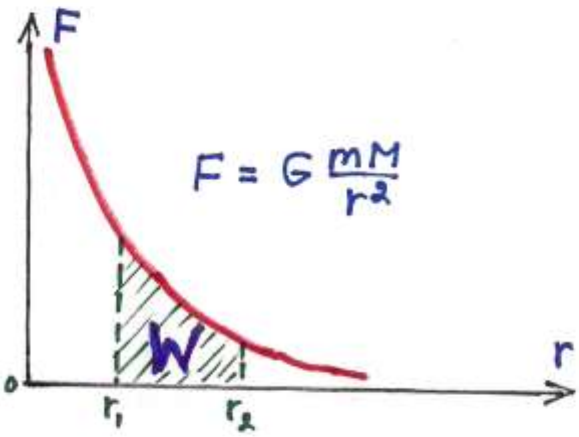
Kokonaistyö $W = \int_R^{R+h} F(r)\cdot dr$

$$W = \int_R^{R+h} F(r)\cdot dr = \int_R^{R+h} \chi \frac{mM}{r^2} dr = \int_R^{R+h} m \cdot \frac{\chi M}{R^2} \cdot R^2 \frac{dr}{r^2}, \qquad jossa\ \frac{\chi M}{R^2} = g$$

$$W = mgR^2 \int_R^{R+h} \frac{dr}{r^2} = mgR^2 \left[-\frac{1}{r}\right]_R^{R+h} = mgR^2\left[-\frac{1}{R+h} - \left(-\frac{1}{R}\right)\right]$$

$$W = mgR^2\left[{}^{R+h)}\frac{1}{R} - {}^{R)}\frac{1}{R+h}\right] = mgR^2 \frac{h}{R(R+h)} = mgR \cdot \frac{h}{R+h}$$

$$\underline{\underline{W = mgh \cdot \frac{R}{R+h}}}$$



<u>Kuva 1.</u>
Työ W saadaan fysikaalisena pinta-alana (r, F)-koordinaatistossa.

Toisin:

Työ voidaan laskea potentiaalienergian muutoksena

$$W = \Delta E_p = E_{p2} - E_{p1} = -\chi \frac{mM}{R+h} - \left(-\chi \frac{mM}{R} \right)$$

$$W = \chi \frac{mM}{R} - \chi \frac{mM}{R+h} = \chi mM \left(\frac{{}^{R+h)}1}{R} - \frac{{}^{R)}1}{R+h} \right)$$

$$W = \chi mM \frac{h}{R(R+h)} = m \cdot \frac{\chi M}{R^2} \cdot \frac{Rh}{R+h} \quad \text{, jossa } \frac{\chi M}{R^2} = g$$

$$W = mgh \frac{R}{R+h}$$

$$\underline{\underline{\text{Vastaus: Työ on } W = mgh \frac{R}{R+h}}}$$

Kun korkeus h hyvin suuri eli h kasvaa rajatta: h →∞

Nostotyö:

$$W = mgh \frac{R}{R+h} = \frac{mghR^{(h}}{R+h} = \frac{mgR}{\frac{R}{h}+1} \to mgR, \text{ kun } h \to \infty$$

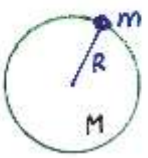
$$\underline{\underline{\text{Vastaus: } W = mgR.}} \qquad (= E_p)$$

\##

Huom!

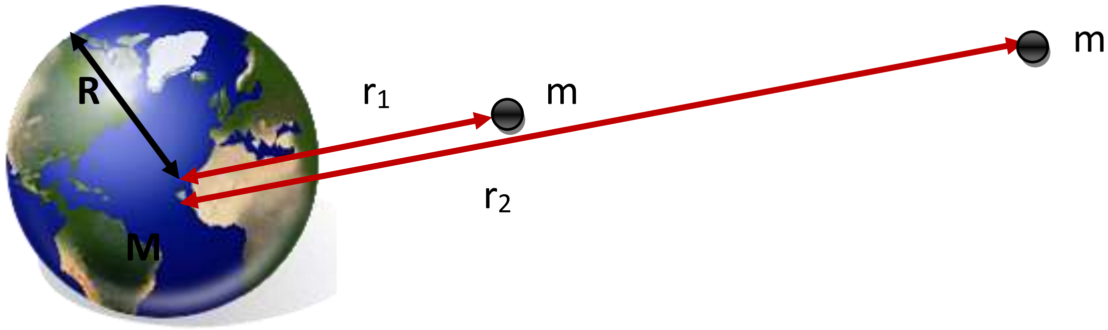
Maapallon pinnalla

paino = gravitaatiovoima: $mg = \gamma \frac{mM}{R^2}$, josta seuraa putoamiskiihtyvyydelle yhtälö



$$g = \frac{\gamma M}{R^2}$$

<u>Tehtävä 2.</u>
<u>Johda kappaleen m potentiaalienergian lauseke Maan gravitaatiokentässä.</u>
<u>Ratkaisu.</u>



Kun kappale nostetaan etäisyydeltä r_1 etäisyydelle r_2 maapallon keskipisteestä, sen potentiaalienergian lisäys on

$$\Delta E_p = E_{p2} - E_{p1} = \int_{r_1}^{r_2} F dr = \int_{r_1}^{r_2} \gamma \frac{Mm}{r^2} dr = \gamma Mm \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr$$

$$\Delta E_p = \gamma Mm \left[-\frac{1}{r}\right]_{r_1}^{r_2} = \gamma Mm \left(-\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1}\right) = -\gamma Mm \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \qquad (*)$$

Sovitaan, että kappaleen potentiaalienergia (tarkemmin sanottuna maapallo-kappale –systeemin potentiaalienergia) on nolla äärettömän kaukana;

$$E_{p2}(r_2) = -\frac{\gamma Mm}{r_2} \to 0, kun\ r_2 \longrightarrow \infty \quad eli \quad E_{p2}(r_2) = 0.$$

$$\Delta E_p = E_{p2}(r_2) - E_{p1}(r_1) = 0 - E_{p1}(r_1) = \gamma \frac{Mm}{r_1}$$

Olkoon **r_1 = r** ja $E_{p1}(r_1) = E_p(r)$. Tällöin $-E_p(r) = \gamma \frac{Mm}{r}$.

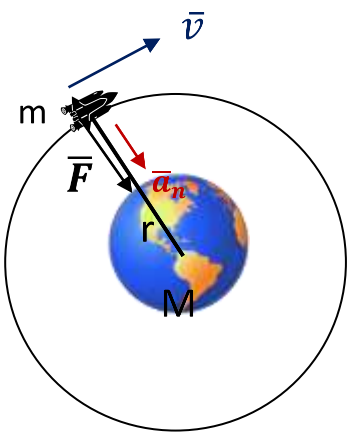
Kappaleen potentiaalienergia Maapallon gravitaatiokentässä on siis lausekkeen (*) mukaan

$$\boxed{E_p = -\gamma \frac{Mm}{r}}$$

(MAOL s. 125 (117)).

<u>Tehtävä 3.</u>
<u>Avaruussukkulan massa on 12 000 kg ja lentokorkeus 300 km.</u>
<u>Kuinka suuri on sukkulan kokonaisenergia Maan gravitaatiokentässä?</u>

<u>Ratkaisu.</u>
r-säteistä ympyrää liikkuvan kappaleen m liikeyhtälö on dynamiikan peruslain (NII) mukaan $\sum \bar{F} = m\bar{a}$ eli $F = ma_n$



$$\boldsymbol{\gamma \frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}} \quad | : m/r$$

$$(gravitaatiovoima = keskeisvoima)$$

$$v^2 = \frac{\gamma M}{r} \quad (**)$$

Kappaleen kokonaisenergia E = E_p + E_k

$$\boldsymbol{E = -\gamma\frac{Mm}{r} + \frac{1}{2}mv^2}$$

Sijoitetaan edellä olevaan
kokonaisenergian lausekkeeseen yhtälö (**): $\boldsymbol{v^2 = \frac{\gamma M}{r}}$,
jolloin saadaan

$$E = -\gamma\frac{Mm}{r} + \frac{1}{2}m\cdot\boldsymbol{\frac{\gamma M}{r}} = -\gamma\frac{{}^{2)}Mm}{r} + \frac{1}{2}m\cdot\boldsymbol{\frac{\gamma M}{r}}$$

$$E = -\frac{2\gamma Mm}{2r} + \frac{\gamma Mm}{2r} = -\frac{\gamma Mm}{2r}$$

$$\boxed{\boldsymbol{E = -\gamma\frac{Mm}{2r}}} \qquad (***)$$

m = avaruussukkulan massa = 12 000 kg
M = maapallon massa = 5,974·10^{24} kg (MAOL s. 120 (112)).
R = maapallon keskimääräinen säde = 6367 km (h = lentokorkeus = 300 km)
γ = gravitaatiovakio (= G, f).
<u>Huom!</u> Mustassa taulukossa gravitaatiovakio γ = 6,67428·10^{-11} Nm²/kg² (MAOL s. 70),
keltaisessa taulukossa: γ = 6,67259·10^{-11} Nm²/kg² (MAOL s. 71).
r = R + h = 6367 km + 300 km = 6667 km.

Sijoitetaan edellä olevat arvot kokonaisenergian E lausekkeeseen (***), jolloin saadaan

$$\boldsymbol{E = -\gamma \frac{Mm}{2r}}$$

$$E = -6{,}67428 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot \frac{5{,}974 \cdot 10^{24} kg \cdot 12000 kg}{2 \cdot 6667000\, m}$$

$$E \approx -3{,}5883 \cdot 10^{11}\, J \approx -359 \cdot 10^{9}\, J$$

<u>Vastaus:</u> $\boldsymbol{Kokonaisenergia\ \ E \approx -360\ GJ}$.