

PAKONOPEUDET eli KOSMISET NOPEUDET

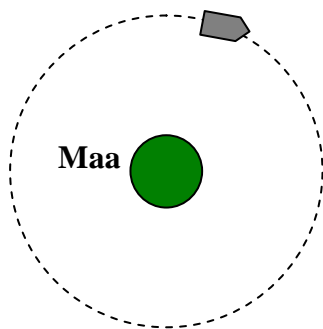
Kappaleen kokonaisenergiasta $E_{\text{kok}} = E_k + E_p$ riippuu mikä on kappaleen ratakäyrän muoto gravitaatiokentässä. Voidaan erottaa kolme ratakäyrää:

- 1) $E_{\text{kok}} < 0 \rightarrow$ **ellipsi**
- 2) $E_{\text{kok}} = 0 \rightarrow$ **paraabeli**
- 3) $E_{\text{kok}} > 0 \rightarrow$ **hyperbeli**

Kun kappaleen kokonaisenergia on negatiivinen ($E_{\text{kok}} < 0$), niin kappale on sidottu keskuskappaleen gravitaatiokenttään. Tällöin kappale kiertää keskuskappaletta ellipsisradalla. Jos kappaleella on tarpeeksi suuri alkunopeus, se voi paeta keskuskappaleensa gravitaatiokentästä. Tällöin kappale voi edetä liike-energiansa avulla äärettömän kauas keskuskappaleesta. Pienin tällainen nopeus vastaa tilannetta, jossa kappaleen nopeus äärettömän kaukana keskuskappaleesta lähestyy nollaa. Tässä tapauksessa kappaleen kokonaisenergia on nolla: $E_{\text{kok}} = E_k + E_p = 0$ ja kappaleen rata on paraabeli (ks. Fotoni 5, s. 111-145).

1. PAKONOPEUS eli 1. kosminen nopeus

= **pienin nopeus, joka kappaleella tulee olla, jotta se voisi kiertää Maata (7,9 km/s)**
 \rightarrow **kappaleesta (esim. avaruusalus) tulee Maan kiertolainen**



Oletetaan, että kappale (esim. avaruusalus, satelliitti, raketti) laukaistaan vaakasuoraan maanpinnan suuntaisesti. Kun kappaleen nopeus on riittävän suuri, niin se putoaa täsmälleen yhtä paljon kuin maanpinta kaartuu sen alla, jolloin kappale kiertää Maata. Kappaleen kiihtyvyys on normaalikihtyvyyttä $a_n = v^2/r$, jonka suunta on kohti Maan keskipistettä. Kappaleeseen vaikuttaa Maan pinnalla gravitaatiovoima $F = \gamma Mm/r^2$, joka antaa kappaleelle dynamiikan peruslain $F = ma$ mukaisen normaalikihtyvyyden $a = a_n = v^2/r$.

(M = Maan massa, m = kappaleen massa, r = Maan säde, v = kappaleen ratanopeus).

Kappaleen (esim. avaruusalus, satelliitti) liikeyhtälö on $\sum \vec{F} = m\vec{a}$, josta saadaan

$$\gamma \frac{Mm}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \quad (\text{gravitaatiovoima} = \text{keskeisvoima})$$

Tästä yhtälöstä saadaan kappaleen **1. kosmiseksi nopeudeksi eli 1. pakonopeudeksi**

$$v = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}} = \sqrt{\frac{6,67259 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5,974 \cdot 10^{24} \text{kg}}{6370 \cdot 10^3 \text{m}}} \approx 7911 \text{ m/s} \approx \underline{\underline{7,9 \text{ km/s}}}$$

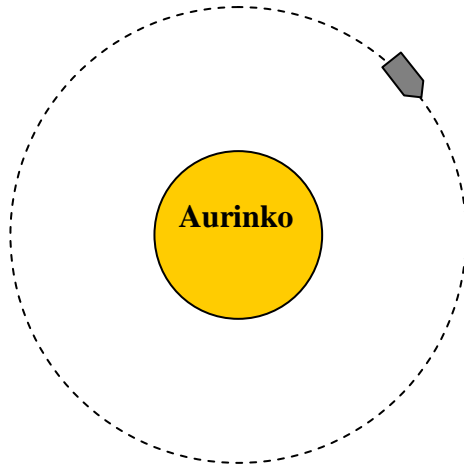
Käytännössä kiihdyttäminen tehdään kantoraketilla vaiheittain. Avaruusalus laukaistaan Maata kiertävälle radalle usein päiväntasaajan läheltä itään päin eli Maan pyörimisen suuntaan, jolloin

saadaan hyödynnettyä Maan kiertoliikettä $\left(\text{Maan kehänopeus } v \approx \frac{40000 \text{ km}}{24 \cdot 3600 \text{ s}} \approx 460 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$.

2. PAKONOPEUS eli 2. kosminen nopeus

= **pienin nopeus, joka kappaleella (esim. avaruusalus, raketti) tulee olla, jotta se poistuisi Maan gravitaatiokentästä (11,2 km/s)**

- kappale (esim. avaruusalus) ei jää Maan kiertolaiseksi, vaan se poistuu Maan vaikutuspiiristä
- kappale jää siis Aurinkoa kiertävälle radalle eli siitä tulee siis tavallaan planeetta



Heti laukaisun jälkeen maanpinnalla kappaleen mekaaninen kokonaisenergia on liike-energian ja potentiaalienergian summa eli $E_{kok} = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-\gamma \frac{mM}{r}\right)$.

Gravitaatioenergian potentiaalienergian nolataso on valittu äärettömän kauaksi Maasta. Avaruusaluksen kokonaisenergian E_{kok} Maan gravitaatiokentässä tulee olla vähintään nolla, koska silloin se pystyy matkaamaan Maan vetovoiman puolesta äärettömyyteen asti.

Tällä etäisyydellä avaruusalus on pysähtynyt ($E_k = 0$ ja $E_p = 0$), jolloin kokonaisenergia on nolla eli $E_{kok} = E_k + E_p = 0$. Mekaanisen energian säilymislain mukaan mekaaninen kokonaisenergia Maan pinnalla on myös nolla eli

$$\frac{1}{2}mv^2 - \gamma \frac{mM}{r} = 0$$

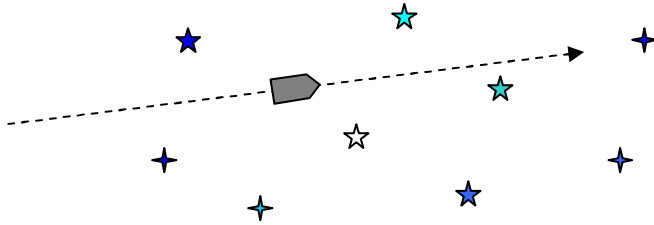
Tästä yhtälöstä saadaan kappaleen **2. kosmiseksi nopeudeksi eli 2. pakonopeudeksi**

$$v = \sqrt{\frac{2\gamma M}{r}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67259 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot 5,974 \cdot 10^{24} kg}{6370 \cdot 10^3 m}} \approx 11187 \text{ m/s} \approx \underline{\underline{11,2 \text{ km/s}}}$$

3. PAKONOPEUS eli 3. kosminen nopeus

= **pienin nopeus, joka kappaleella (esim. avaruusalus, raketti) tulee olla, jotta se poistuisi Aurinkokunnan vetovoimakentästä (42,2 km/s)**

- kappale (esim. avaruusalus) ei jää Maan kiertolaiseksi, vaan se poistuu kokonaan Maan vaikutuspiiristä
- kappaleesta tulee näin joko kenotekoinen tähti, joka kiertää Linnunradan keskustaa tai jotakin tähteä kiertävä ”keinoplaneetta”



Tässä tapauksessa avaruusaluksen kokonaisenergian tulee olla vähintään nolla eli $E_{\text{kok}} = E_k + E_p \geq 0$. Potentiaalienergia Auringon gravitaatiokentässä on laskettava pääasiallisesti Auringon vetovoiman perustella, koska Auringon massa on planeettojen massoja huomattavasti suurempi, joten se määrää Aurinkokunnan potentiaalienergian kaukana planeetoista. Rajatapauksessa kokonaisenergia on nolla, joten Maan etäisyydellä Auringosta ($r = 150 \cdot 10^9$ m) pätee

$$\frac{1}{2}mv^2 - \gamma \frac{mM_{\odot}}{r} = 0$$

missä M_{\odot} = Auringon massa.

Edellä olevasta yhtälöstä saadaan kappaleen **3. kosmiseksi nopeudeksi eli 3. pakonopeudeksi**

$$v = \sqrt{\frac{2\gamma M_{\odot}}{r}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67259 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{150 \cdot 10^9 \text{ m}}} \approx 42066 \text{ m/s} \approx \underline{\underline{42,1 \text{ km/s}}}$$

