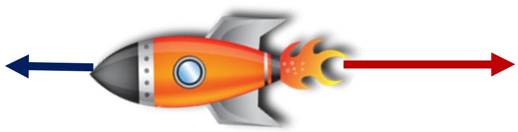
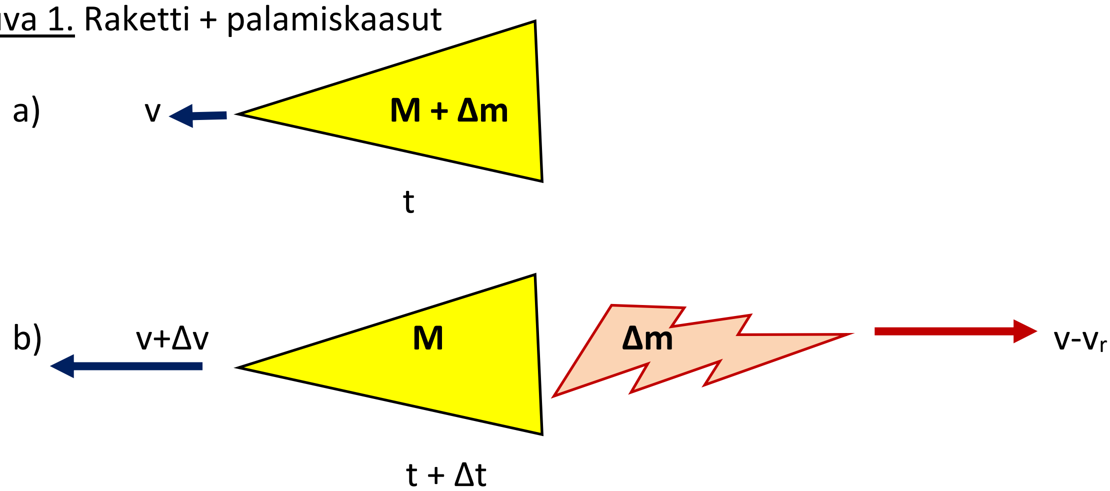
Raketin nopeus, työntövoima ja teho

Autojen ja junien liikkuminen on mahdollista kitkavoiman takia, jonka tie tai raiteet kohdistavat ajoneuvon pyöriin. Avaruusraketin liikkuminen avaruudessa sen sijaan perustuu rakettiperiaatteeseen, joka on seurausta liikemäärän säilymislaista. Systeemin muodostavat raketti ja siitä purkautuvat palamiskaasut. Raketin ja palamiskaasujen liikemäärän muutokset ovat itseisarvoltaan yhtä suuret:
$|\Delta p_{raketti}| = |\Delta p_{palamiskaasut}|$. (ks. Inkinen-Tuohi: Momentti 1; Insinöörifysiikka, Otava 2006, 4. painos, s. 167-169).



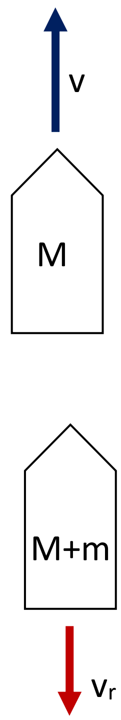
Purkautuvat palamiskaasut muuttavat raketin liikemäärää. Raketti saa yhtä suuren, mutta vastakkaissuuntaisen liikemäärän kuin palamiskaasut. Oletetaan, että raketin ja polttoaineen muodostamaan systeemiin vaikuttava kokonaisvoima on nolla: $F = 0$. Tällöin myös voiman impulssi $I = F \cdot \Delta t = 0$. Tilanne on tällainen vapaassa avaruudessa, jossa raketti saa kiihtyvyyden palamiskaasujen aiheuttaman reaktiovoiman ansiosta. Systeemin sisäenergia (ajoaineen energia) saa aikaan liike-energian kasvun, vaikka systeemin kokonaisliikemäärä säilyy.

Kuva 1. Raketti + palamiskaasut



Raketin massan M ja polttoaineen massa m. Jollakin hetkellä t raketin ja polttoaineen massa on $M+\Delta m$ ja systeemin liikemäärä on $(M+\Delta m)v$, missä v on raketin nopeus (Maan suhteen). Aikavälillä Δt raketista virtaa ulos polttoaineen palamistuotteita, joiden massa on Δm (ks. kuva 1). Tällöin raketin nopeus kasvaa arvoon $v + \Delta v$. Raketin nopeuden muutos on Δv.

Ulos virtaavien pakokaasujen nopeus raketin suhteen on v_r, joka pysyy jatkuvasti samana. Palamiskaasujen nopeus Maan suhteen (kiinteä vertailukoordinaatisto) v-v_r puolestaan muuttuu, koska raketin nopeus v muuttuu (ks. kuva 1).
Liikemäärän säilymislain perusteella kuvan 1a ja 1 b tilanteissa saadaan:
$\mathbf{(M + \Delta m)v \;=\; M(v + \Delta v) + \Delta m(v - v_r)}$, josta sieventämällä seuraa
$\mathbf{Mv + \Delta mv \;=\; Mv + M\Delta v + \Delta mv - \Delta mv_r}$ ja edelleen
$\mathbf{M\Delta v \;=\; v_r\Delta m}$ (1)
Asetetaan: $\Delta t \rightarrow 0$, niin $\Delta v \rightarrow dv$ ja $\Delta m \rightarrow dm$.
Poistuvien palamiskaasuhiukkasten massa dm vastaa samansuuruista raketin massan pienenemistä, joten $dm = -dM$. Ottamalla nämä huomioon saadaan lauseke (1) muotoon:
$\mathbf{Mdv \;=\; -v_r dM}$ (2)
Alussa (t = 0) raketin ja polttoaineen alkuperäinen massa on M+m, kun raketin alkunopeus on v_o. lopussa raketin massa on M, kun kaikki polttoaine on käytetty loppuun. Tällöin raketin loppunopeus on v. Palamiskaasujen purkautumisnopeus rakettiin nähden on v_r. Erotetaan muuttujat yhtälössä (2) ja integroidaan puolittain, jolloin saadaan raketin nopeuden lisäykselle lauseke:



$$dv = -v_r \frac{dM}{M} \quad \rightarrow \quad \int_{v_o}^{v} dv = -v_r \int_{M+m}^{M} \frac{dM}{M}$$

$$v - v_o = -v_r ln \frac{M}{M+m}$$

Asetetaan $v_o = 0$ ja huomioidaan, että $-lna = ln\frac{1}{a}$,
jolloin saadaan **raketin nopeudeksi ns.** *Tsiolkovskin laki:*
(ks. http://fi.wikipedia.org/wiki/Tsiolkovskin_laki)

$$\boxed{v = v_r ln \frac{M+m}{M}} \quad (*)$$

missä v = raketin nopeus (km/s)
v_r = palamiskaasujen purkautumisnopeus (km/s) (rakettiin nähden)
M = raketin massa (ilman polttoainetta) (kg)
m = polttoaineen massa (kg)
M+m = raketin + polttoaineen massa (kg).

Raketin ***nopeuden yhtälöstä*** (*) eli ***rakettitekniikan peruskaavasta*** havaitaan, että raketin nopeus on suoraan verrannollinen

- palamiskaasujen purkautumisnopeuteen v_r
- suhteeseen $\frac{M+m}{M}$, joka saadaan suureksi siten, että pelkkä raketin massa M on mahdollisimman pieni ja polttoaineen massa m mahdollisimman suuri.

(ks. http://koti.mbnet.fi/jukaukor/fysiikka/avaruusfysiikkaa.pdf).

Logaritmista johtuen kuitenkin raketin loppunopeus kasvaa hitaammin kuin massasuhde. Esimerkiksi massasuhteen nelinkertaistuessa raketin nopeus ainoastaan kolminkertaistuu. Nykyaikaisten rakettien massasuhde on parhaimmillaan suuruusluokkaa 8 – 9. Jos polttoaineena käytetään vetyä ja happea, niin palamiskaasujen purkautumisnopeus on 4000 m/s. Palamiskaasujen purkautumisnopeus v_r muuttuu ulkoisen ilmanpaineen mukana ja se on suurimmillaan tyhjiössä. Rakettitekniikan perusyhtälössä (*) on jätetty huomiotta myös ilmanvastus ja gravitaatiovoima, joiden merkitys korkealla Maan pinnasta (ulkoavaruudessa)on varsin pieni. Nopeuden lisäämiseen tarvitaan monivaiheraketti.

Raketista ulospurkautuvat palamiskaasut aiheuttavat rakettiin työntövoiman F, jonka lauseke saadaan impulssilaista: voiman impulssi = liikemäärän muutos:
F·dt = Mdv. Sijoittamalla yhtälö (2) Mdv = -v_rdM, lausekkeeseen saadaan
F·dt = -v_rdM. Jaetaan saatu yhtälö puolittain dt:llä ja otetaan itseisarvo, jolloin saadaan **raketin työntövoimaksi** yhtälö:

$$\boxed{F = \left| v_r \frac{dM}{dt} \right|} \qquad (**)$$

missä F = raketin työntövoima (N)
v_r = pakokaasujen poistumisnopeus (km/s)
dM/dt = massan muutosnopeus eli palamisnopeus (polttoaineen kulutus ajassa Δt) (kg/s).
Raketin työntövoiman yhtälöstä havaitaan, että työntövoima F kasvaa, kun

- palamiskaasujen nopeus kasvaa
- massan muutosnopeus eli palamisnopeus kasvaa

Avaruusraketin keskimääräinen teho on energian muutos aikayksikössä:
P = E/t = W/t = F·s/t = Fv_r = $\frac{1}{2} v_r^2 \frac{dM}{dt}$

$$\boxed{P = \frac{1}{2} v_r^2 \frac{dM}{dt}} \qquad (***)$$

Esim. 1.
Olkoon raketin massasuhde $\frac{M+m}{M} = 9$ ja pakokaasujen purkautumisnopeus v_r = 4000 m/s. Mikä on raketin nopeus?

Ratkaisu:
Rakettitekniikan perusyhtälön mukaan

$$v = v_r ln \frac{M+m}{M} = 4{,}0 \frac{km}{s} \cdot ln9 \approx 8{,}79 \frac{km}{s}$$

V: 8,8 km/s.

Esim. 2.

Raketin nopeus avaruudessa on 3,0 km/s. Polttoaineen palamiskaasut purkautuvat rakettiin nähden nopeudella 5,0 km/s. Polttoaineen kulutus on 50 kg/s.

a) Kuinka suuri raketin nopeus on silloin, kun raketin ja polttoaineen yhteismassa on puolittunut?
b) Laske raketin työntövoiman suuruus.
c) Mikä on raketin teho?

Ratkaisu:

a) Rakettitekniikan perusyhtälön mukaan

$$v = v_o + v_r ln\frac{M+m}{M} = 3{,}0\frac{km}{s} + 5{,}0\frac{km}{s}\cdot ln\frac{2}{1} \approx 6{,}47\frac{km}{s}$$ = **6,5 km/s.**

b) Raketin työntövoima $F = \left|v_r\frac{dM}{dt}\right| = 5000\frac{m}{s}\cdot 50\frac{kg}{s}$ = 250 000 N = **0,25 MN**.

c) Raketin teho P = $\frac{1}{2}v_r^2\frac{dM}{dt} = \frac{1}{2}\left(5000\frac{m}{s}\right)^2\cdot 50\frac{kg}{s} = 625\,000\,000\,W.$

$P \approx$ **0,63 GW.**

Esim. 3.

Saturnus V:n ensimmäinen vaihe kulutti polttoainetta 15 t/s, jolloin palamiskaasujen purkautumisnopeus oli 2,6 km/s. Laske raketin työntövoiman suuruus.

Ratkaisu:

Raketin työntövoima $F = \left|v_r\frac{dM}{dt}\right| = 2600\frac{m}{s}\cdot 15\,000\frac{kg}{s}$ = 390 000 000 N

F = 0,39 GN.

****

Kirjallisuutta:

- *Hannu Karttunen: Avaruuden valloitus, Ursa 2014, s. 255-268.*
- Inkinen-Tuohi: Momentti 1; Insinöörifysiikka, Otava 2006, 4. painos, s. 167-169.
- Young & Freedman: Sears and Zemansky's University Physics with Modern Physics, Pearson international edition, Addison-Wesley, 12th edition, 2008, p. 270-272.
- Halliday-Resnick-Walker: Fundamentals of Physics, John Wiley & Sons, sixth edition, 2001, p. 181-183.
- Alonso-Finn: University Physics, Addison-Wesley, 1995, p.134-136.
- Ohanian: Physics, second edition, expanded, W. W. Norton & Company, 1989, p. 261-264.

****